JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 27, 203–226 (1979)

Optimale Quadraturformeln und Perfektsplines

HANS STRAUSS

Institut für Angewandte Mathematik I, Universität Erlangen–Nürnberg, 8520 Erlangen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received April 21, 1978

EINLEITUNG

In zahlreichen Arbeiten wurden Quadraturformeln $Q(f)$ so bestimmt, daß für das Restglied $R(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - Q(f)$ die Konstante c in

$$|R(f)| \leqslant c \left(\int_0^1 f^{(n)}(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

minimal wird (siehe Schoenberg [12]). In dieser Arbeit untersuchen wir Quadraturformeln mit minimaler Konstante c in folgender Abschätzung

$$|R(f)| \leqslant c \max_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)|,$$

wobei auch die Stützstellen der Quadraturformel variabel sind. Für die Fälle $n = 1, 2$ hat Nikolskii [11] schon die optimalen Formeln angegeben. Diese Ergebnisse sollen hier auf Quadraturformeln von beliebigem Grad n erweitert werden.

Dabei untersucht man ein L_1-Approximationsproblem für Splinefunktionen mit freien Knoten. Als vorteilhaft erweist sich die Charakterisierung der Minimallösungen mit Perfektsplines. Diese Charakterisierung wurde schon in früheren Arbeiten von Strauß [14], [15] durchgeführt. In [16] wurden Charakterisierungs- und Eindeutigkeitssätze für Approximationsprobleme mit festen und freien Knoten angegeben und der Zusammenhang mit Quadraturformeln gezeigt. In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse bei freien Knoten ausführlich bewiesen. Dabei zeigt sich, daß das genannte Problem zu einem L_1-Approximationsproblem für semidefinite Perfektsplines äquivalent ist. In [14] wurde zunächst gezeigt, daß die angegebene Charakterisierung durch Perfektsplines beim Problem mit freien Knoten eine notwendige Bedingung ist. Außerdem ergab sich, daß eine Minimallösung stets einfache Knoten besitzt. Es wurde dann ein Iterationsverfahren abgeleitet. Die Minimallösungen unseres Problems sind

0021-9045/79/110203–24$02.00/0

Fixpunkte dieses Verfahrens. Hier wird nun gezeigt, daß nur ein Fixpunkt existiert.

Lange [5] hat Aussagen über die Variation der Knoten eines Monosplines bei Änderung der Nullstellen gemacht. Diese Ergebnisse werden auf Perfektsplines übertragen und ergeben die Eindeutigkeit des Fixpunktes durch eine Kontraktionseigenschaft des Iterationsverfahrens. Daraus folgt, daß die angegebene Bedingung auch hinreichend ist und die Minimallösung eindeutig. C.A. Micchelli hat eine Minimalleigenschaft der Euler-Mac-Laurinschen Quadraturformel für feste Stützstellen nachgewiesen. Aus unseren Überlegungen ergibt sich die Optimalität auch für variable Stützstellen.

1. Problemstellung

Unter der Quadraturformel eines linearen Funktionals $L(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ für Funktionen auf [0, 1] versteht man den Ausdruck

$$Q(f) = \sum_{i\in I} A_i f^{(i)}(0) + \sum_{j\in J} B_j f^{(j)}(1) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} f^{(j)}(x_i), \tag{1.1}$$

wobei I und J vorgegebene Teilmengen von $\{0,..., n-1\}$ sein sollen, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = 1$ und $0 < m_i \leqslant n$, $i = 1,..., m$ ist. Jede Wahl von A_i, B_i, c_{ij}, x_i liefert eine Quadraturformel. Das lineare Funktional $R(f) = L(f) - Q(f)$ wird Restglied genannt. Die Quadraturformeln sollen stets alle Polynome bis zum Grad $n-1$ exakt integrieren, *d.h.* $R(f) = 0$ für alle $f \in \pi_{n-1}$.

Gesucht sind alle Quadraturformeln, für deren Restglied $\bar{R}$ gilt:

$$\sup_{\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant 1} |\bar{R}(f)| = \inf_{Q} \sup_{\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant 1} |R(f)|, \tag{1.2}$$

wobei Q die genannten Quadraturformeln durchläuft. Für die Indexmengen I und J gelte mit $I = \{i_1,..., i_p\}$, $J = \{j_1,..., j_q\}$

$$l_{\nu-1} + k \geqslant \nu, \ \nu = 1,..., n, \tag{1.3}$$

wobei l_ν die Anzahl von Elementen in $\{i_1,..., i_p, j_1,..., j_q\}$ ist, die kleiner oder gleich ν ist. Diese Bedingung ist wegen folgender Aussage notwendig (Michelli C.A. and T.J. Rivlin [9]): Zu jeder Wahl von $(x_i)_{i=1}^m$ existiert eine Quadraturformel von der Form (1.1), die alle Polynome bis zum Grad $n-1$ exakt integriert, genau dann, wenn I und J die Bedingung (1.3) erfüllen.

Daher wird im folgenden stets gefordert, daß Bedingung (1.3) gültig sei.

Die genannten Probleme sollen durch Approximationsprobleme gelöst werden.

Sei

$$S = \left\{ s \;\middle|\; s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij}(x - x_i)_+^{n-j} \right\}$$

ein Raum von Splinefunktionen, wobei m und m_i wie oben gewählt sind. Wir bilden die Klasse der Monosplines

$$\overline{M}_{n,k} = \{M \mid M(x) = x^n/n! - s(x),\ s \in S\},$$

die folgende Randbedingungen erfüllen

$$\overline{M}_{n,k}(C') = \{M \in \overline{M}_{n,k} \mid M^{(i)}(0) = 0,\ i \in I',\ M^{(j)}(1) = 0,\ j \in J'\},$$

wobei $I' = \{n - i - 1 \mid i \in \{0,..., n - 1\} \setminus I\} = \{i_1',..., i_{n-p}'\}$,
$J' = \{n - j - 1 \mid j \in \{0,..., n - 1\} \setminus J\} = \{j_1',..., j_{n-q}'\}$

ist.

Dabei kann man I' und J' als duale Mengen von I und J betrachten. Es gilt nun: Das Restglied einer Quadraturformel hat die Darstellung

$$R(f) = (-1)^n \int_0^1 M(x) f^{(n)}(x)\, dx, \qquad M \in \overline{M}_{n,k}(C').$$

Dies führt auf unser Approximationsproblem. Gesucht ist ein Monospline $M_0 \in \overline{M}_{n,k}(C')$, so daß

$$\int_0^1 |M_0(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |M(x)|\, dx \qquad \text{für alle} \quad M \in \overline{M}_{n,k}(C') \tag{1.4}$$

gilt.

Den Lösungen von Problem (1.4) sind Quadraturformeln zugeordnet, die (1.2) erfüllen.

2. Charakterisierungssätze

Zur Charakterisierung benötigen wir eine Klasse von Splinefunktionen, die sogenannten Perfektsplines

$$P_{n,r}(C) = \left\{ P \;\middle|\; P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j + ((-1)^r/n!) \left[x^n + 2 \sum_{i=1}^{r} (-1)^i (x - u_i)_+^n \right], \right.$$

$$\left. 0 < u_1 < \cdots < u_r < 1,\ P^{(i)}(0) = 0,\ i \in I,\ P^{(j)}(1) = 0,\ j \in J \right\},$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ reelle Konstanten sind. Diese Funktionsklasse ist bei Karlin [2] ausführlich beschrieben.

Sei $M_{n,k}(C')$ die Menge von Monosplines in $\overline{M}_{n,k}(C')$, die in $(0, 1)$ die maximale Anzahl an Nullstellen besitzt. Bekanntlicherweise haben diese Monosplines k einfache Knoten. Weiter seien

$$\mathfrak{X} = \{(x_i)_{i=1}^k \mid x_1 > 0, x_2 - x_1 > 0, \ldots, 1 - x_k > 0\}$$

$$\mathfrak{U} = \{(u_i)_{i=1}^r \mid u_1 > 0, u_2 - u_1 > 0, \ldots, 1 - u_r > 0\}$$

vorgegebene Mengen, die die Knoten der Monosplines *bzw*. Perfektsplines beschreiben sollen.

Problem I. Seien n, k, I und J vorgegeben. Gesucht ist ein Monospline $M_0 \in \overline{M}_{n,k}(C')$, der

$$\int_0^1 |M_0(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |M(x)|\, dx \qquad \text{für alle} \quad M \in \overline{M}_{n,k}(C')$$

erfüllt.

SATZ 2.1. (a) *Es existiert genau eine Minimallösung M_0 von Problem I und M_0 ist Element von $M_{n,k}(C')$.*

(b) *Der Monospline M_0 ist genau dann eine Minimallösung, wenn ein Perfektspline $P_0 \in P_{n,r}(C)$, $r = 2k + p + q - n$, existiert, so daß*

$$P_0^{(n)}(x) = \operatorname{sgn}(M_0(x))$$

$$P_0(x_i) = P_0'(x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k$$

ist, wobei $(x_i)_{i=1}^k$ die Knoten von M_0 sind.

Der größte Teil dieser Arbeit wird dem Beweis dieser Aussage dienen. Es zeigt sich dabei, daß das vorgegebene Problem zu einer anderen Fragestellung äquivalent ist.

Problem II. Es sei n, k, I und J gegeben. Sei

$$P_{n,r}^0(C) = \{P \in P_{n,r}(C) \mid (-1)^n P(x) \geqslant 0,\ x \in [0, 1],\ r = 2k + p + q - n\}.$$

Gesucht ist ein $P_0 \in P_{n,r}^0(C)$, das

$$\left| \int_0^1 P_0(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_0^1 P(x)\, dx \right| \qquad \text{für alle} \quad P \in P_{n,r}^0(C)$$

erfüllt.

Dies ist ein L_1-Approximationsproblem für semidefinite Perfektsplines.

SATZ 2.2. (a) *Es existiert genau ein Element* $P_0 \in P_{n,r}(C)$, *das Problem II löst.*

(b) *Der Perfektspline* P_0 *ist genau dann eine Minimallösung, wenn ein Monospline* $M_0 \in M_{n,k}(C')$ *existiert mit*

$$P_0^{(n)}(x) = \operatorname{sgn} M_0(x)$$

$$P_0(x_i) = P_0'(x_i) = 0, \qquad i = 1,..., k$$

wobei x_i *die Knoten von* M_0 *sind.*

(c) *Es gilt*

$$\int_0^1 | M_0(x) | \, dx = \left| \int_0^1 P_0(x) \, dx \right|.$$

Wir nennen die eben beschriebenen Paare künftig *duale Paare*, denn die Knoten des Perfektsplines sind die Nullstellen des Monosplines und die Nullstellen des Perfektsplines sind die Knoten des Monosplines.

Die genannten Approximationsprobleme sind einander zugeordnet.

3. HILFSSÄTZE

In diesem Paragraphen sollen einige Hilfsmittel angegeben werden, die wir später benötigen.

Es seien die Indexmengen I und J vorgegeben, die Bedingung (1.3) erfüllen. Dann gilt, daß die zugeordneten Indexmengen I' und J'

$$l_\nu' + r \geqslant \nu, \qquad \nu = 1,..., n, \quad r = k - p + q - n \tag{3.1}$$

erfüllen, wobei l_ν' die Anzahl an Elementen in $\{i_1' ,..., i_{n-p}' , j_1' ,..., j_{n-q}'\}$ sein soll, die kleiner oder gleich ν ist (siehe Strauß [15]).

Auf Grund dieser Eigenschaften gelten die folgenden Aussagen: Es seien also n, k, I und J gegeben.

SATZ 3.1. *Es existiert genau ein Monospline* $M \in \overline{M}_{n,k}(C')$, *der* $M(u_i) = 0$ *erfüllt, wobei* $(u_i)_{i=1}^r \in \mathfrak{A}$, $r = 2k + p + q - n$ *ist.*
(*siehe Karlin S. and C.A. Micchelli* [4] *und* (3.1)).

SATZ 3.2. *Es existiert ein $P \in P_{n,r}(C)$, der*

$$P^{(j)}(x_i) = 0, \qquad i = 1,\ldots, m, \;\; j = 0,\ldots, m_i - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = n + r - p - q$$

erfüllt. (*siehe S. Karlin* [2]).

Wir untersuchen nun die Anzahl der Nullstellen von Splines aus S, *d.h.* $s \in S$ hat die Form

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij}(x - x_i)_+^{n-j}.$$

Unter $S^+(c_i)_0^{n-1} = S^+(\{c_i\}_0^{n-1})$ verstehen wir die Maximalanzahl von Vorzeichenwechseln der geordneten Folge $c_0, \ldots, c_{n-1}$, wobei man für die Nullen $+1$ oder -1 setzen darf. Unter $S^-(c_i)_0^{n-1}$ versteht man die Anzahl der Vorzeichenwechsel der $(c_i)_{i=0}^{n-1}$, wenn die Nullen weggestrichen sind. Es gilt folgende Beziehung

$$S^+((-1)^i\, c_i)_0^{n-1} + S^-(c_i)_0^{n-1} = n - 1.$$

Mit $Z(s; (0, 1))$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen von s in $(0, 1)$ und $Z(s; x)$ die Vielfachheit von s im Punkt x. Für x zwischen den Knoten wird $Z(s; x)$ wie bei Polynomen definiert. In einem Knoten x_j habe nun $s(x)$ eine linksseitige Nullstelle der Vielfachheit α und eine rechtsseitige Nullstelle der Vielfachheit β. Dann wird die Vielfachheit von s in x_j angegeben als

(i) α, falls $\alpha = \beta \leqslant n - m_i - 1$

(ii) $\alpha + S^+(s^{(\alpha)}(x_j^-), s^{(n-m_j)}(x_j^+))$, falls $\alpha \geqslant \beta = n - m_j$

(iii) $\beta + S^+(s^{(n-m_j)}(x_j^-), \epsilon_j(-1)^\beta s^{(\beta)}(x_j^+))$, falls $\beta \geqslant \alpha = n - m_j$,

wobei $\epsilon_j = (-1)^{n-m_j-1}$ ist. Diese Definition stammt von Micchelli [8]. Als $Z(s; (0, 1))$ bezeichnen wir die Summe über alle Nullstellen. Wir benötigen nun einen Satz von Budan–Fourier für Splines, der von Melkman [6] entwickelt wurde. Zunächst wird folgende Hilfsfunktion eingeführt:

(a) Sei s vom Maximalgrad auf $[0, 1]$, *d.h.* $s^{(n-1)}(x) \neq 0$, $x \in (0, 1)$ und

$$W(s; x_j) = S^+(\{\epsilon_j(-1)^i\, s^{(i)}(x_j^-)\}_{n-1}^{n-m_j-1}, \{s^{(i)}(x_j^+)\}_{n-m_j}^{n-1}) - m_j\,. \tag{3.2}$$

Dabei wird $c_n, \ldots, c_{n-m}$ abgekürzt $\{c_i\}_n^m$ geschrieben. $W(s; x_j)$ wird als Vielfachheit der Nullstelle von $s^{(n-1)}$ in x_j betrachtet. Für einen Punkt $\bar{x}$, der kein Knoten ist, gilt $W(s; \bar{x}) = 0$.

Mit $W(s; (0, 1))$ bezeichnen wir die Summe über alle Knoten.

(b) Man läßt nun allgemeiner noch zu, daß s nicht auf allen Teilintervallen den Maximalgrad $n - 1$ hat und bezeichnet mit n_j den Grad von $s \mid [x_j, x_{j+1}]$. Falls $n_0 < n - 1$, $n_m < n - 1$ und $n_i = n - 1$, $i = 1,...,m - 1$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} W(s; (0, x_1]) &= S^+(s^{(n_0)}(0), s^{(i)}(x_1{}^+)_{n-m_1}^{n-1}) \\ W(s; [x_m, 1)) &= S^+((-1)^i s^{(i)}(x_m{}^-)_{n-1}^{n-m_m}, (-1)^{n_m} s^{(n_m)}(1)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$W(s; (x_1, x_m))$ ist wie unter (a) definiert.

Mit diesen Bezeichnungen zeigt Melkman [6] folgende beide Aussagen:

SATZ 3.3. *Sei $s \in S$ ein Spline ohne Nullstellenintervall, der $s^{(n-1)}(x) = 0$ $x \in (x_1, x_m)$ erfüllt. Dann gilt*

$$Z(s; (0, 1)) - S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1} + S^+(s^{(i)}(1))_0^{n-1} \leqslant W(s; (0, 1)). \tag{3.4}$$

SATZ 3.4. *Sei $s \in S$ ein Spline mit Höchstgrad n_j auf (x_j, x_{j+1}), dann gilt*

$$Z(s; (0, 1)) - S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1} + S^+(s^{(i)}(1))_0^{n-1} \leqslant \sum_{j=1}^{m} m_j - \sum_{j=1}^{m-1} (n - 1 - n_j).$$

Diese beiden Sätze sind Spezialfälle der Aussagen von Melkman. Mit Hilfe dieser Aussagen wird gezeigt:

LEMMA 3.5. *Sei $M \in M_{n,k}(C')$ gegeben mit*

$$M(u_i) = 0, \qquad i = 1,..., r, \quad (u_i)_{i=1}^{l} \in \mathfrak{A}.$$

Dann gilt

(a) $(-1)^p M(x) > 0 \qquad x \in (0, \epsilon)$, ϵ hinreichend klein

(b) Es ist $b_i > 0$, $i = 1,..., k$, wobei

$$M(x) = \frac{x^n}{n!} - P_{n-1}(x) - \sum_{i=0}^{k} b_i(x - x_i)_+^{n-1}.$$

Beweis. (a) Aus den Nullstelleneigenschaften in 0 *bzw.* 1 folgt

$$S^-(M^{(i)}(0))_0^n \leqslant p, \qquad S^+(M^{(i)}(1))_0^n \geqslant n - q,$$

da $n - p = |I'|$ und $n - q = |J'|$. Damit ist

$$Z(M; (0, 1)) - S^-(M^{(i)}(0))_0^n + S^+(M^{(i)}(1))_0^n \geqslant r - p + n - q = 2k.$$

Nach Satz 3.4 folgt, daß die linke Seite kleiner gleich $2k$ ist, *d.h.*

$$S^-(M^{(i)}(0))_0^n = p, \qquad S^+(M^{(i)}(1))_0^n = n - q.$$

Nun ist $M^{(n)}(0) > 0$; daraus folgt $(-1)^p M(0) \geqslant 0$ und es existiert ein $\epsilon > 0$, so daß $(-1)^p M(x) > 0$ für $x \in (0, \epsilon)$.

(b) Diese Aussage wurde ohne Randbedingungen bei Micchelli [8] bewiesen. Sie folgt auch aus Satz 3.3.

LEMMA 3.6. *Sei $P \in P_{n,r}(C)$, $r = 2k + p + q - n$ und*

$$P(x_i) = P'(x_i) = 0, \qquad i = 1,..., k, \quad (x_i)_{i=1}^k \in \mathfrak{X}.$$

Dann ist

(a) $(-1)^n P(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$,
(b) $(-1)^p P^{(n)}(0) = 1$,
(c) $S^-(P^{(i)}(0))_0^n = n - p$, $S^+(P^{(i)}(1))_0^n = q$.

Beweis. $(-1)^p P(0) = 1$ folgt sofort aus der Darstellung von P. Wie in Lemma 3.5 beweist man die Aussage (c). Daraus folgt, daß $(-1)^n P(x) \geqslant 0$ auf $(0, \epsilon)$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Man kann nun mit Satz 3.4 zeigen, daß P außer den k doppelten Nullstellen keine weiteren Nullstellen haben kann. Dies beweist Aussage (a).

Es gelten außerdem Verschränktheitsbedingungen, die von einer Reihe von Autoren angegeben wurden.

LEMMA 3.7. (a) *Sei $M \in M_{n,k}(C')$ mit den Knoten $(x_i)_{i=1}^k$ und den Nullstellen $(u_i)_{i=1}^r$, $r = 2k + p + q - n$. Dann gilt*

$$u_{2i+p-n} < x_i < u_{2i+p}, \qquad i = 1,..., k$$

sofern die Indizes sinnvoll sind.

(b) *Sei $P \in P_{n,r}(C)$ mit den doppelten Nullstellen x_i und den Knoten $(u_i)_{i=1}^r$, $r = 2k + p + q - n$. Dann gilt*

$$y_{i-p} < u_i < y_{n+i-p}, \qquad i = 1,..., r,$$

sofern die Indizes sinnvoll sind, wobei $y_{2i-1} = y_{2i} = x_i$, $i = 1,..., k$ ist.

Außerdem ist folgende Aussage wohlbekannt.

LEMMA 3.8. *Es sei eine geordnete Punktmenge* $T = \{t_i\}_{i=1}^{n+k-p-q}$ *in* (a, b) *gegeben und der Raum S mit vorgegebener Knotenverteilung. Das Interpolationsproblem*

$$\begin{aligned} s(t_i) &= y_i & i &= 1,..., n + k - p - q \\ s^{(i)}(0) &= y_i^0 & i &\in I \\ s^{(j)}(1) &= y_j^1 & j &\in J \end{aligned}$$

hat genau eine Lösung $s \in S$ *für beliebige reelle Daten* $(y_i)_{i=1}^{n+k-p-q}$, $(y_i^0)_{i \in I}$, $(y_j^1)_{j \in J}$, *wenn gilt:*

(a) *In jedem Punkt* $\bar{x} \in (a, b)$ *dürfen insgesamt höchstens* n *Punkte von* T *und Knoten von* S *zusammenfallen.*

(b) *Es gilt*

$$t_{i-p} < x_i < t_{i+n-p} \qquad i = 1,..., n + k - p - q$$

sofern die Indizes sinnvoll sind.

(c) *Die Mengen* I *und* J *erfüllen* (1.3).

Bemerkung 3.9. In Karlin [2] wurde die Eindeutigkeit der Lösung von Satz 3.2 nur für speziellere Randbedingungen gezeigt. Aber auch in unserem Fall ist die Lösung noch eindeutig. Man kann dies *z.B.* auch mit Hilfe von Lemma 3.8 unter Benutzung der Aussagen in Strauß [14], Section 2 zeigen.

4. BEWEISE

In Strauß [14] wurde für speziellere Randbedingungen schon gezeigt, daß die in Satz 2.1 genannte Bedingung notwendig für Minimallösungen ist. Daraus wurde ein Iterationsverfahren entwickelt, das Monosplines mit diesen Eigenschaften liefert. Diese Aussage wird hier in folgendem Sinne erweitert. Es wird gezeigt, daß zu vorgegebenen Werten von n, k, I und J genau ein Monospline existiert, der einen dualen Perfektspline besitzt. Dieser Monospline ist dann die Minimallösung und kann mit Hilfe des Iterationsverfahrens bestimmt werden.

Wir genötigen nun folgende Vereinbarungen: Sei $P \in P_{n,r}(C)$ gegeben durch

$$P(x) = \sum_{i \in I'} c_i x^i + ((-1)^p/n!) \left[x^n + 2 \sum_{i=1}^{r} (-1)^i (x - u_i)_+^n\right],$$

wobei

$$P(x_i) = 0, \; P'(x_i) = 0, \qquad i = 1,..., k, \; (x_i) \in \mathfrak{X}, \; P^{(j)}(1) = 0, j \in J \quad (4.1)$$

gilt. Dieses Gleichungssystem soll kurz durch

$$P(X, \bar{U}) = 0, \qquad X = (x_1, ..., x_k) \qquad \bar{U} = (c_{i_1'}, ..., c_{i_{n-p}'}, u_1, ..., u_r) \quad (4.2)$$

beschrieben werden.

Sei $M \in M_{n,k}(C')$ gegeben durch

$$M(x) = x^n/n! - \sum_{i \in I} a_i x^i - \sum_{i=1}^{k} b_i (x - x_i)_+^{n-1}$$

wobei

$$M(u_i) = 0, \, i = 1, ..., r, \, (u_i) \in \mathfrak{U}, \, M^{(j)}(1) = 0, j \in J' \qquad (4.3)$$

gilt. Dieses Gleichungssystem wird kurz

$$\begin{aligned} M(U, \bar{X}) = 0 \qquad & U = (u_1, ..., u_r) \\ & \bar{X} = (a_{i_1}, ..., a_{i_p}, b_1, ..., b_k, x_1, ..., x_k) \end{aligned} \qquad (4.4)$$

geschrieben.

Es existieren nun Abbildungen $\bar{f}$, $\bar{g}$, so daß

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{f}(X), \, P(X, \bar{f}(X)) = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \\ \bar{X} &= \bar{g}(U), \, M(U, \bar{g}(U)) = 0 \qquad \text{für alle } \; U \in \mathfrak{U} \end{aligned}$$

gilt.

Wir betrachten noch die folgenden Restriktionen:

$$\begin{aligned} f &= (f_1, ..., f_r) := (\bar{f}_{n-p+1}, ..., \bar{f}_{n-p+r}) \\ g &= (g_1, ..., g_k) := (\bar{g}_{k+p+1}, ..., \bar{g}_{2k+p}). \end{aligned}$$

Dann gilt: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$, $g\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{X}$. Weiter sei $h = g \cdot f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$.

Iterationsverfahren: Es sei $X_1 \in \mathfrak{X}$ beliebig vorgegeben. Dann sei für alle natürlichen Zahlen ν

$$\begin{aligned} U_\nu &= f(X_\nu) \qquad X_\nu \in \mathfrak{X} \\ X_{\nu+1} &= g(U_\nu) \qquad U_\nu \in \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

Außerdem seien P_ν die Lösungen von (4.1) zu X_ν und $M_{\nu+1}$ die Lösungen von (4.3) zu U_ν.

Dann gilt der Satz (siehe auch Strauß [14]):

SATZ 4.1. *Es besteht die Beziehung*

$$\int_0^1 |M_{\nu+1}(x)| \, dx \leqslant \left| \int_0^1 P_\nu(x) \, dx \right| \leqslant \int_0^1 |M_\nu(x)| \, dx,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $M_\nu = M_{\nu+1}$ *gilt.*

Beweis. Die auftretenden Splines haben folgende Form

$$M_{\nu+1}(x) = x^n/n! - \sum_{i\in I} a_{i,\nu+1}x^i - \sum_{i=1}^{k} b_{i,\nu+1}(x - x_{i,\nu+1})_+^{n-1}$$

mit $M_{\nu+1}(u_{i\nu}) = 0$, $i = 1,\dots, r$ und

$$P_\nu(x) = \sum_{i\in I'} c_{i\nu}x^i + ((-1)^p/n!)\left[x^n + 2\sum_{i=1}^{r} (-1)^i (x - u_{i\nu})_+^n\right]$$

$$P_\nu(x_{i\nu}) = P_\nu'(x_{i\nu}) = 0, \qquad i = 1,\dots, k.$$

Eine n-fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 M_\nu(x)\, P_\nu^{(n)}(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\, M_\nu^{(i)}(x)\cdot P_\nu^{(n-i-1)}(x)\Big|_0^1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{n-1}\, M_\nu^{(n-1)}(x)\, P_\nu(x)\Big|_{x_{i\nu}-0}^{x_{i\nu}-0} \\ &\quad + (-1)^n \int_0^1 P_\nu(x)\, dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 P_\nu(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die erste Summe verschwindet wegen der Nullstelleneigenschaften am Rand, die sich aus $M_\nu \in M_{n,k}(C')$, $P_\nu \in P_{n,r}(C)$ ergeben und die zweite Summe wegen $P_\nu(x_{i\nu}) = 0$, $i = 1,\dots, k$. Nach der Konstruktion folgt aus Lemma 3.5a und Lemma 3.6b

$$\operatorname{sgn} M_{\nu+1}(x) = P_\nu^{(n)}(x). \tag{4.6}$$

Wie in (4.5) folgt

$$\begin{aligned}&\int_0^1 M_{\nu+1}(x)\, P_\nu^{(n)}(x)\, dx \\ &\quad = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{n-1}\, b_{i,\nu+1}(n-1)!\, P_\nu(x_{i,\nu+1}) + (-1)^n \int_0^1 P_\nu(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Es gilt $b_{i,\nu+1} > 0$, $i = 1,\ldots, k$, nach Lemma 3.5b und $(-1)^n P_\nu(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$, nach Lemma 3.6a. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{n-1}\, b_{i,\nu+1} P_\nu(x_{i,\nu+1}) \leqslant 0 \tag{4.8}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_{i,\nu+1} = x_{i,\nu}$, $i = 1,\ldots, k$.

Die Beziehungen (4.5), (4.6), (4.7) und (4.8) ergeben

$$\int_0^1 |\, M_{\nu+1}(x)|\, dx \leqslant (-1)^n \int_0^1 P_\nu(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 M_\nu(x)\, P_\nu^{(n)}(x)\, dx \leqslant \int_0^1 |\, M_\nu(x)|\, dx$$

und Gleichheit gilt, wenn $x_{i,\nu+1} = x_{i\nu}$, $i = 1,\ldots, k$, *d.h.* es muß $M_\nu = M_{\nu+1}$ sein. Dieses Iterationsverfahren, angewendet auf Elemente von $M_{n,k}(C')$, liefert uns duale Paare. Mit ähnlichen Argumenten folgt nun, daß in $\overline{M}_{n,k}(C')$ kein Monospline mit kleinerer L_1-Norm als in $M_{n,k}(C')$ liegt.

SATZ 4.2. *Zu jedem $M \in \overline{M}_{n,k}(C') \setminus M_{n,k}(C')$ existiert ein $M_1 \in M_{n,k}(C')$, so daß*

$$\int_0^1 |\, M_1(x)|\, dx < \int_0^1 |\, M(x)|\, dx.$$

Beweis. Wir setzen $h_i = m_i$, falls m_i gerade und $h_i = m_i + 1$, falls m_i ungerade ist. Außerdem sei $h = (1/2)\ (2k - \sum_{i=1}^{m} h_i)$. Falls $h > 0$ ist, wählen wir Punkte $(z_i)_{i=1}^{h}$, die mit keinem Knoten x_i von M zusammenfallen dürfen.

Sei nun $P \in P_{n,r}(C)$ Lösung des Interpolationsproblems

$$\begin{aligned} P^{(j)}(x_i) &= 0 \qquad && i = 1,\ldots, m \\ & && j = 0,\ldots, h_i - 1 \\ P(z_i) = P'(z_i) &= 0 && i = 1,\ldots, h. \end{aligned}$$

Man kann nun eine (4.5) entsprechende Beziehung herstellen, aus der

$$\int_0^1 M(x) \cdot P^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_0^1 P(x)\, dx$$

folgt. Da $sgn\, M(x) \neq P^{(n)}(x)$ ist, gilt

$$\int_0^1 |M(x)|\, dx > \left| \int_0^1 P(x)\, dx \right|.$$

Dem Perfektspline $P \in P_{n,r}(C)$ kann man nun wie in Satz 4.1 einen Monospline $M_1 \in M_{n,k}(C')$ zuordnen, so daß

$$\int_0^1 |M_1(x)|\, dx < \int_0^1 |M(x)|\, dx$$

gilt.

Außerdem gilt:

SATZ 4.3. *Es existiert ein $M_0 \in M_{n,k}(C')$, so daß*

$$\int_0^1 |M_0(x)|\, dx \leq \int_0^1 |M(x)|\, dx \qquad \text{für alle} \quad M \in M_{n,k}(C')$$

Beweis. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß die Koeffizienten der Elemente von $M_{n,k}(C')$ beschränkt sind. Daraus folgt die Existenz einer Minimallösung.

Bemerkung 4.4. Bisher wurde gezeigt: Aus Satz 4.2 folgt, daß jede Lösung von Problem I in $M_{n,k}(C')$ liegen muß. In $M_{n,k}(C')$ konnte die Existenz einer Minimallösung nachgewiesen werden. Damit existiert eine Minimallösung M_0 und sie hat maximale Nullstellenanzahl.

Jeder Minimallösung M_0 ist nach Satz 4.1 ein dualer Perfektspline zugeordnet. Nun soll noch gezeigt werden, daß nur ein duales Paar existiert. Dabei benutzen wir Beweismethoden wie sie Lange [5] angegeben hat. Dies führt uns zur Lösung unseres Problems.

Wir untersuchen die weiter oben angegebene Abbildung $h: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. Um gewisse Kontraktionseigenschaften von h nachzuweisen, betrachtet man die partiellen Ableitungen von f und g.

Informationen über diese partielle Ableitungen erhält man, wenn man die Gleichungssysteme (4.2) und (4.4) differenziert. Es gilt

LEMMA 4.5. *Es seien die Gleichungssysteme $P(X, \overline{U}) = 0$ und $M(U, \overline{X}) = 0$ gegeben. Dann ist*

(a) $\det \left(\dfrac{\partial P(X, \overline{U})}{\partial \overline{U}} \right) \neq 0,$

(b) $\det \left(\dfrac{\partial M(U, \overline{X})}{\partial \overline{X}} \right) \neq 0.$

Beweis. Diese Aussage ergibt sich mit Hilfe der Verschränktheitsbedingungen von Lemma 3.9.

Nun untersuchen wir die Gleichungssysteme

$$\frac{\partial P(X, \bar{U})}{\partial X} + \frac{\partial P(X, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial X}(X) = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial M(U, \bar{X})}{\partial U} + \frac{\partial M(U, \bar{X})}{\partial \bar{X}} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial U}(U) = 0. \tag{4.10}$$

Zunächst wird das Gleichungssystem (4.9) betrachtet. Es ist

$$\frac{\partial P(X, \bar{U})}{\partial X} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \\ P''(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P''(x_k) \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} q \end{array} \tag{4.11}$$

Man bildet nun die Splines

$$s_j(x) = -\sum_{\nu=1}^{n-p} \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial x_j} x^{i_\nu'} + 2 \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{p+i}}{(n-1)!} (x - u_i)_+^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)$$

$$j = 1, \ldots, k. \tag{4.12}$$

Aus (4.9) und (4.11) ergibt sich, daß der Spline s_j folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} & s_j(x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k \\ & s_j'(x_i) = \delta_{ij} P''(x_j) \qquad i = 1, \ldots, k \\ & s_j^{(i)}(0) = 0, \quad i \in I, \qquad s_j^{(i)}(1) = 0, \quad i \in J. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Daraus ergibt sich:

LEMMA 4.6. *Für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Beweis. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Spline von (4.12) mit den Eigenschaften (4.13) durch $s := s_j$. Er habe die Form

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{r} b_i (x - u_i)_+^{n-1}$$

(a) Der Spline s besitze kein Nullstellenintervall. Damit ist $p \doteq n$ und $q \doteq n$. Aus (4.13) folgt

$$S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1} \leqslant n - p - 1, \qquad S^-(s^{(i)}(1))_0^{n-1} \geqslant q.$$

Da $Z(s; (0, 1)) \geqslant 2k - 1$ und $m_j = 1$, $j = 1,..., r$, ist, folgt aus Satz 3.4, daß $\sum_{j=1}^{r-1}(n - 1 - n_j) = 0$, so daß s auf dem Intervall $[u_1, u_r]$ Maximalgrad hat. Nach Satz 3.3 gilt dann $W(s; (0, 1)) \geqslant r$. Da aber $W(s; u_i) \leqslant 1$ ist, folgt $W(s; (0, 1)) = r$.

Damit haben wir gezeigt

$$S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1} = n - p - 1, \qquad S^+(s^{(i)}(1))_0^{n-1} = q$$
$$Z(s; (0, 1)) = 2k - 1, \tag{4.14}$$

(α) Sei nun $n_0 = n_r = n - 1$. Dann gilt nach Definition von $W(s; u_i)$

$$S^+((-1)^{2n-1}s^{(n-1)}(u_i^-), (-1)^{2n-2}s^{(n-2)}(u_i^-), s^{(n-1)}(u_i^-)) = 2 \tag{4.15}$$

Weiter ist $s^{(n-1)}(u_i^-) \neq 0$ und $s^{(n-1)}(u_i^+) \neq 0$, $i = 1,..., r$. Aus (4.15) folgt $s^{(n-1)}(u_i^-) \cdot s^{(n-1)}(u_i^+) < 0$, $i = 1,..., r$. Da $(n-1)!\, b_i = (s^{(n-1)}(u_i^+) - s^{(n-1)}(u_i^-))$ ist, ergibt sich $\zeta(-1)^i b_i > 0$, $i = 1,..., r$ und $\zeta = \pm 1$.

Nun ist noch ζ zu bestimmen. Es ist $(-1)^n P(x) \geqslant 0$ für $x \in (0, 1)$ nach Lemma 3.6a, also $(-1)^n P''(x_j) > 0$. Aus $s'(x_j) = P''(x_j)$ und der Tatsache, daß P sonst die gleichen Nullstellen wie s hat, folgt $-s(x)P(x) > 0$ für $x \in (0, \epsilon)$, wobei $\epsilon > 0$ hinreichend klein ist. Aus (4.14) und $(-1)^n P(x) \geqslant 0$ folgt dann $(-1)^p s^{(n-1)}(0) > 0$ und damit $(-1)^p b_1 < 0$ und $b_i \cdot b_{i+1} < 0$, $i = 1,..., r - 1$. Aus (4.12) ergibt sich die Aussage des Satzes im Fall (α).

(β) Sei $n_0 < n - 1$, $n_r = n - 1$. Dann folgt nach (3.3)

$$s^{(n_0)}(u_1^-) \cdot s^{(n-1)}(u_1^+) < 0$$

Es ist $(n - 1)!\, b_1 = s^{(n-1)}(u_1^+)$. Wie in ($\alpha$) folgt

$$(-1)^p\, s^{(n_0)}(0) > 0, \qquad \text{d.h.} \quad (-1)^p\, b_1 < 0.$$

Die anderen Knoten werden wie in (α) behandelt. Wenn $n_r < n - 1$ ist, folgt aus $s^{(n-1)}(u_r^+) = 0$, daß b_i den geforderten Bedingungen genügt.

(b) Die Funktion s besitze Nullstellenintervalle. Sie müssen von der Form $[0, u_\mu]$ *bzw.* $[u_\nu, 1]$ sein. Falls s diese beiden Nullstellenintervalle besitzt, gilt $S^-(s^{(i)}(u_\mu))_0^{n-1} = 0$, $S^+(s^{(i)}(u_\nu))_0^{n-1} = n-1$. Nach Satz 3.4 gilt $Z(s; (u_\mu, u_\nu)) \leqslant \nu - \mu - n$. Aus der Verschränktheitsbedingung folgt, daß von den vorgegebenen Nullstellen auf die Intervalle $(0, u_\mu]$, (u_μ, u_ν) *bzw.* $[u_\nu, 1)$ jeweils $n + \mu - 1 - p$, $\nu - \mu - n$ *bzw.* $n + r - \nu - q$ entfallen. Aus Satz 3.4 folgt, daß s auf $[u_\mu, u_\nu]$ Maximalgrad hat. Wie in (a) folgt $b_i b_{i+1} < 0$, $i = \mu,..., \nu - 1$, nach Satz 3.3 und $(-1)^{n-1}s(x) > 0$ für $x \in (u_\mu, u_\mu + \epsilon)$, *d.h.* $(-1)^{n-1}b_\mu > 0$. Daraus folgt nach (4.12), daß $(-1)^{n+\mu-1+p}(\partial f_\mu/\partial x_j) > 0$ ist. Da aber $(n + \mu - 1 - p)$ gerade ist, weil die Anzahl der in $(0, \mu_\mu]$ vorgegebenen Nullstellen gerade ist, folgt $\partial f_\mu/\partial x_j > 0$, $i = \mu,..., \nu - 1$. Wenn nur ein Nullstellenintervall von s vorliegt, folgt der Beweis durch Argumente, wie sie in (a) und (b) verwendet werden.

Bemerkung 4.7. Es seien $\bar{X}, \tilde{X} \in \mathfrak{X}$ gegeben und $\bar{U} = f(\bar{X})$ *bzw.* $\tilde{U} = f(\tilde{X})$. Nach der Kettenregel gilt

$$\tilde{u}_i - \bar{u}_i = f_i(\tilde{X}) - f_i(\bar{X}) = \sum_{j=1}^{k} (\tilde{x}_j - \bar{x}_j) \frac{\partial f_i(\bar{X} + \theta(\tilde{X} - \bar{X}))}{\partial x_j}, \qquad i = 1,..., r, \quad (4.16)$$

wobei die i-te Komponente von $\tilde{U}$ *bzw.* $\bar{U}$ betrachtet wird.

Die partiellen Ableitungen von f machen eine Aussage darüber, wie sich die Knoten beim Interpolationsproblem für Perfektsplines ändern, wenn die Eingangsdaten geändert werden. Zunächst haben wir in Lemma 4.6 gezeigt, daß die partiellen Ableitungen nicht negativ sind. Jetzt soll eine Aussage über eine Summe partieller Ableitungen gemacht werden.

Wir bilden

$$\bar{s}(x) = \sum_{j=1}^{k} s_j(x).$$

Aus (4.13) folgen die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\bar{s}(x_i) = 0, \qquad \bar{s}'(x_i) = P''(x_i), \quad i = 1,..., k, \\ &\bar{s}^{(i)}(0) = 0, \quad i \in I, \qquad \bar{s}^{(j)}(1) = 0, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sei nun

$$\begin{aligned} s(x) &= P'(x) - \bar{s}(x) \\ &= p_{n-1}(x) + ((-1)^p/(n-1)!) \\ &\quad \times \left[x^{n-1} + 2 \sum_{i=1}^{r} (-1)^i (x - u_i)_+^{n-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{f_i}{x_j}(X)\right)\right] \quad (4.18) \end{aligned}$$

wobei p_{n-1} ein Polynom von Höchstgrad $n-1$ ist. Dieser Spline hat folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned} s(x_i) &= s'(x_i) = 0 && i = 1,\dots, k \\ s^{(i)}(0) &= P^{(i+1)}(0) && i \in I \\ s^{(j)}(1) &= P^{(j+1)}(1) && j \in J \end{aligned} \tag{4.19}$$

LEMMA 4.8. *Der Spline s von* (4.18) *erfüllt*

$$S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1} \leqslant n - p,$$

$$S^+(s^{(i)}(1))_0^{n-1} \geqslant q - 1.$$

Beweis. Nach Lemma 3.6c ist $S^-(P^{(i)}(0))_0^n = n - p$ und $S^+(P^{(i)}(1))_0^n = q$.

(a) Es sei $\{(P^{(\nu_1+i)}(0))_{i=1}^{\mu_1}, \dots, (P^{(\nu_h+i)}(0))_{i=1}^{\mu_h}\}$ die Teilfolge von $(P^{(i)}(0))_0^n$, in der die Nullen gestrichen sind. Sie enthält $n - p + 1$ Elemente mit $n - p$ Vorzeichenwechsel. Sei $\nu_1 \geqslant 0$. In der Folge $(s^{(i)}(0))_0^{n-1}$ können höchstens folgende Elemente ungleich Null sein

$$\{(s^{(\nu_1+i)}(0))_{i=0}^{\mu_1}, \dots, (s^{(\nu_h+i)}(0))_{i=0}^{\mu_h}\}. \tag{4.20}$$

Da außerdem $s^{(\nu_i)}(0) = P^{(\nu_i+1)}(0)$, $i = 1,\dots, h$ ist, folgt $S^+\{(s^{(i)}(0))_0^{n-1}\} \leqslant n - p$.
Sei $\nu_1 = -1$. Dann setzt man als ersten Block in (4.20) $(s^{(\nu_1+i)}(0))_{i=1}^{\mu_1}$. Damit bleibt die Abschätzung natürlich auch richtig.

(b) Aus $S^+(P^{(i)}(1))_0^n = q$ ergibt sich, weil die Folge q Nullen besitzt, daß jeder Block ohne Nullen stets das gleiche Vorzeichen besitzt. Sind zwei Blöcke durch eine gerade Anzahl von Nullen getrennt, besitzen sie gleiches Vorzeichen, sind sie durch eine ungerade Anzahl von Nullen getrennt, besitzen sie verschiedenes Vorzeichen. Mit diesen Argumenten ergibt sich $S^+\{s^{(i)}(1))_{i\in J}\} = q - 1$.

LEMMA 4.9. *Es gilt*

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right) \geqslant 0, \qquad i = 1,\dots, r \tag{4.21}$$

Für $I = J = \varnothing$ gilt $\sum_{j=1}^k(\partial f_i/\partial x_j) = 1$, $i = 1,\dots, r$. Sonst existiert ein i_0, so daß $\sum_{j=1}^k(\partial f_{i_0}/\partial x_j) < 1$ ist.

Beweis. Im Fall $p = q = 0$ gilt $s \equiv 0$ wegen der Verschränkheitsbedingungen. Damit ist $\sum_{j=1}^k(\partial f_i/\partial x_j) = 1$. Falls $p \neq 0$ oder $q \neq 0$ ist der Spline $s \not\equiv 0$. Sei $\alpha = S^-(s^{(i)}(0))_0^{n-1}$, *bzw.* $\beta = S^+(s^{(i)}(1))_0^{n-1}$.

(a) Der Spline s besitze kein Nullstellenintervall und sei $p \neq 0$, $q \neq 0$. Aus Satz 3.4 und Lemma 4.8 folgt, daß nur die folgenden Fälle möglich sind:

(i) $\alpha = n - p$, $\beta = q - 1$, (ii) $\alpha = n - p - 1$, $\beta = q - 1$, (iii) $\alpha = n - p$, $\beta = q$. Seien i_p und j_q die größten Elemente in I *bzw.* J. Wenn $\alpha = n - p$ ist, gilt $P^{(i_p+1)}(0) = s^{(i_p)}(0) \neq 0$. Aus $P^{(i+1)}(0)\, P^{(i+2)}(0) < 0$, $s^{(i)}(0) \cdot s^{(i+1)}(0) < 0$, $i = i_p ,..., n - 1$ folgt $P^{(n)}(0) \cdot s^{(n-1)}(0) > 0$. Außerdem ergibt sich aus $\beta = q$ oder $\beta = q - 1$ wegen $s^{(j_q)}(1) = P^{(j_q+1)}(1) \neq 0$, daß $s^{(i)}(1)P^{(i+1)}(1) > 0$, $i = j_q ,..., n - 1$ ist und damit

$$s^{(n-1)}(1)P^{(n)}(1) > 0.$$

In Fall (i) gilt für hinreichend kleine ϵ_1, ϵ_2

$$P(x)s(x) > 0, \; x \in (0, \epsilon_1)$$

$$P(x)s(x) < 0, \; x \in (1 - \epsilon_2 , 1).$$

Also hat s eine weitere Nullstelle in (0, 1), es ist also $Z(s; (0, 1)) \geqslant 2k + 1$. In Fall (ii) und (iii) ist $Z(s; (0, 1)) \geqslant 2k$. Aus Satz 3.4 folgt nun, daß s auf $[u_1 , u_r]$ vom Höchstgrad ist. Dann folgt nach Satz 3.3 die Beziehung $W(s; (0, 1)) = r$. In Verbindung mit $P^{(n)}(1)s^{(n-1)}(1) > 0$ folgt $P^{(n)}(x)s^{(n-1)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$. Damit kann man (4.21) wie in Lemma 4.6 zeigen.

(b) Sei s ohne Nullstellenintervall mit $p = 0$, $q \neq 0$ *bzw.* $p \neq 0$, $q = 0$. Dann führen mit $\alpha = n - 1$ *bzw.* $\beta = 0$ die gleichen Überlegungen wie in (a) zum Ziel.

(c) Der Spline s besitze Nullstellenintervalle:

Im Fall $p \neq 0$, $q \neq 0$ liegt ein Nullstellenintervall $[u_i , u_k] \subset (0, 1)$ vor. Man wendet die Überlegungen von (a) auf die Intervalle $[0, u_i]$ und $[u_k , 1]$ *an*, wobei $S^+(s^{(i)}(u_i))_0^{n-1} = n - 1$ und $S^-(s^{(i)}(u_k))_{0-1}^{n} = 0$ ist. Im Falle $p = 0$ *bzw.* $q = 0$ ist $u_i = a$ *bzw*, $u_k = b$.

Bemerkung. Das Lemma 4.9 und die Beziehung (4.16) ergeben, daß bei Variation der Nullstellen eines Perfektsplines sich die Knoten nur innerhalb gewisser Schranken ändern können.

Für Monosplines wurden solche Aussagen schon von Lange [5] gezeigt. In dieser Arbeit wird ein etwas anderes Interpolationsproblem betrachtet. Die dort verwendeten Methoden lassen sich auch hier benutzen. Man kann aber auch die Methoden von Lemma 4.6, Lemma 4.8 und Lemma 4.9 verwenden, wobei in diesem Fall Splines mit doppelten Knoten vorliegen. Im Einzelnen ergibt sich:

Sei

$$\frac{\partial M(U,\bar{X})}{\partial U} = \begin{array}{c} \left.\begin{pmatrix} M'(u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & M'(u_r) \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-q \end{array}\right. \end{array} \tag{4.22}$$

Aus dem Gleichungssystem (4.10) ergeben sich deshalb für die Splines

$$t_j(u) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\partial \bar{g}_\nu}{\partial u_j}(U)\, u^{i_\nu} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \bar{g}_{i+p}}{\partial u_j}(U)(u - x_i)_+^{n-1}$$

$$- \sum_{i=1}^{k} (n-1)\, b_i \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(U) \cdot (u - x_i)_+^{n-2}, \qquad j = 1,\ldots, r, \tag{4.23}$$

die Eigenschaften

$$\begin{aligned} t_j(u_i) &= \delta_{ij} M'(u_j) && i = 1,\ldots, r \\ t_j^{(i)}(0) &= 0 && i \in I' \\ t_j^{(i)}(1) &= 0 && i \in J'. \end{aligned} \tag{4.24}$$

LEMMA 4.10. *Für alle $j = 1,\ldots, r$ gilt*

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(U) \geqslant 0, \qquad i = 1,\ldots, k.$$

Beweis. Wie in Lemma 4.6 zeigt man diese Aussage. Die Koeffizienten in (4.23) werden unter Verwendung von (4.24) untersucht.

Dann bilden wir den Spline

$$\bar{t}(u) = \sum_{j=1}^{r} t_j(u)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \bar{g}_\nu}{\partial u_j}(U)\, u^{i_\nu} + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \bar{g}_{i+p}}{\partial u_j}(U) \right) (u - x_i)_+^{n-1}$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{r} b_i (n-1) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(U) \right) (u - x_i)_+^{n-2}, \tag{4.25}$$

der die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \bar{t}(u_i) &= M'(u_i), \qquad i = 1,\ldots, r \\ \bar{t}^{(i)}(0) = 0, \quad i \in I', &\qquad \bar{t}^{(j)}(1) = 0, \quad j \in J' \end{aligned} \tag{4.26}$$

besitzt. Damit bilden wir den Spline

$$\begin{aligned} t(u) &= M'(u) - \bar{t}(u) \\ &= u^{n-1}/(n-1)! + \pi_{n-1} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i (u - x_i)_+^{n-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} b_i (n-1) \left(1 - \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(U)\right) (u - x_i)_+^{n-2}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

wobei π_{n-1} ein Polynom vom Höchstgrad $n-1$ ist und β_i reelle Zahlen sind.
Dieser Spline hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} t(u_i) &= 0, \qquad i = 1,\ldots, r \\ t^{(i)}(0) &= M^{(i+1)}(0), \ i \in I', \\ t^{(j)}(1) &= M^{(j+1)}(1), \ j \in J'. \end{aligned} \tag{4.28}$$

LEMMA 4.11. *Es gilt*

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(U)\right) \geqslant 0, \qquad i = 1,\ldots, k.$$

Für $I' = J' = \varnothing$ *gilt* $\sum_{j=1}^{r} (\partial g_i / \partial u_j)(U) = 1$. *Sonst existiert ein* i_0, *so daß* $\sum_{j=1}^{k} (\partial g_{i_0} / \partial u_j)(U) < 1$ *ist.*

Beweis. Es werden Aussagen über das Vorzeichen der Koeffizienten in (4.27) unter Benutzung von (4.28) gemacht (siehe Lemma 4.9).

Nun soll die Abbildung h betrachtet werden:

Seien $X^1, X^2 \in \mathfrak{X}$ gegeben und $U^i = f(X^i)$ *bzw.* $\bar{X}^i = g(U^i)$, $i = 1, 2$. Dann ist

$$\bar{x}_\nu^2 - \bar{x}_\nu^1 = h_\nu(X^1) - h_\nu(X^2) = \sum_{j=1}^{k} (x_\nu^2 - x_\nu^1) \frac{\partial h_\nu}{\partial x_j} (X^1 + \theta(X^2 - X^1)).$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h_\nu}{\partial x_j}(X) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial g_\nu}{\partial u_i}(U) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial g_\nu}{\partial u_i}(U) \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X).$$

Aus Lemma 4.9 und Lemma 4.11 folgt

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h_\nu}{\partial x_i} (X) \right| \leqslant 1 \tag{4.29}$$

und es existiert ein ν_0, so daß

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h_{\nu 0}}{\partial x_i} (X) \right| < 1. \tag{4.30}$$

SATZ 4.12. *Die Abbildung h: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ besitzt höchstens einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe zwei Fixpunkte X^1, $X^2 \subset \mathfrak{X}$. Sei $X^i = (x_1^{\,i},..., x_k^{\,i})$, $i = 1, 2$.

(a) Es existiere ein c, so daß $|x_i^1 - x_i^2| = c$, $i = 1,..., k$. Dann existiert ein ν_0, so daß nach (4.29) und (4.30) gilt

$$\begin{aligned} | x_{\nu_0}^2 - x_{\nu_0}^1 | &= | h_{\nu_0}(X^2) - h_{\nu_0}(X^1)| \\ &\leqslant | x_{\nu_0}^2 - x_{\nu_0}^1 | \left| \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h_{\nu 0}}{\partial x_i} (X^1 + \theta_{\nu_0}(X^2 - X^1)) \right| \\ &< | x_{\nu_0}^2 - x_{\nu_0}^1 |. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

(b) Seien i_0, i_1 Indizes, so daß $| x_{i_0}^2 - x_{i_0}^1 | \geqslant | x_i^2 - x_i^1 |$, $i = 1,..., k$, $| x_{i_0}^2 - x_{i_0}^1 | > | x_{i_1}^2 - x_{i_1}^1 |$ gilt. Sei $i_0 = \nu$, $i_1 = \nu + 1$. Dann ist nach (4.29)

$$\begin{aligned} | x_\nu^2 - x_\nu^1 | &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |(x_i^2 - x_i^1)| \left| \frac{\partial h_\nu}{\partial x_i} (X^1 + \theta_\nu(X^2 - X^1)) \right| \\ &< | x_\nu^2 - x_\nu^1 | \left| \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h_\nu}{\partial x_i} (X^1 + \theta_\nu(X^2 - X^1)) \right| \\ &\leqslant | x_\nu^2 - x_\nu^1 |, \end{aligned}$$

denn wir zeigen, daß $(\partial h_\nu/\partial x_{\nu+1})(X^1 + \theta_\nu(X^2 - X^1)) > 0$ ist. Sei $X = X = X^1 + \theta_\nu(X^2 - X^1)$, sowie $f(X) = U = (u_i)_{i=1}^r$, $g(U) = \overline{X} = (\bar{x}_i)_{i=1}^k$. Es gelten die Verschränktheitsbedingungen $u_{2i-n+p} < x_i < u_{2i+p}$. $i = 1,..., k$. Der Spline $s_{\nu+1}$ von (4.12) erfüllt $s'_{\nu+1}(x_{\nu+1}) \neq 0$. Mit den Nullstelleneigenschaften (4.13) folgt, daß $s_{\nu+1}$ auf $[u_{2\nu-n+p+2}, u_{2\nu+p+2}]$ nicht identisch Null ist. Dies heißt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}}(X) \neq 0, \qquad i = 2\nu - n + p + 2,\ldots, 2\nu + p + 2.$$

Außerdem gilt $\bar{y}_{i-p} < u_i < \bar{y}_{i+n-p}$, $i = 1,\ldots, r$, wobei $\bar{y}_{2i-1} = \bar{y}_{2i} = \bar{x}_i$ ist. Sei nun $\tau = \max(2\nu - n + p + 2, 1)$. Aus $1 \leqslant \nu < k$ folgt $1 \leqslant \tau \leqslant r$. Dann ist $t_\tau(u)$ auf $[\bar{y}_{2\nu+2-n}, \bar{y}_{2\nu+2}]$ *bzw.* $[\bar{y}_{1-p}, \bar{y}_{1+n-p}]$ nicht identisch Null. Es zeigt sich für $n \geqslant 3$, daß $[\bar{y}_{2\nu-1}, \bar{y}_{2\nu+2}]$ stets in dem zu τ gehörigen Intervall liegt. Damit ist t_τ nicht identisch Null auf $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ mit Knoten von doppelter Vielfachheit in $\bar{x}_\nu$ und $\bar{x}_{\nu+1}$. Es gilt also $(\partial f_\tau/\partial x_{\nu+1})(X) \neq 0$ und $(\partial g_\nu/\partial u_\tau)(U) \neq 0$. Daraus folgt

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x_{\nu+1}}(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial g_\nu}{\partial u_i}(U)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}}(X) > 0.$$

Ebenso verläuft der Beweis für $i_1 = \nu - 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Satz 2.1. Nach Satz 4.12 gilt für $n \geqslant 3$, daß nur ein duales Paar existiert, für $n = 2$ kann man es elementar nachweisen. Aus Bemerkung 4.4 ergibt sich damit der Beweis von Satz 2.1.

Beweis von Satz 2.2. Es läßt sich entsprechend Satz 4.2 zeigen, daß eine Minimallösung von Problem II genau $2k$ Nullstellen in (0, 1) besitzen muß. Perfektsplines mit dieser Eigenschaft haben beschränkte Koeffizienten und daher existiert eine Minimallösung. Sie muß nach Satz 4.1 einen dualen Monospline besitzen. Nach Satz 4.12 existiert nur ein dualer Monospline. Damit ist der Satz gezeigt.

5. Beispiele

(I) *Euler-Mac-Laurinsche Quadraturformeln*

Sei $n = 2t + 1$ oder $n = 2t$ und $I = J = \{0, 1, 3,\ldots, 2t - 1\}$. Der Einfachheit halber betrachten wir das Intervall $[0, k + 1]$. Nun soll Problem I für k Knoten gelöst werden. Als duales Paar erhalten wir den Bernoullischen Monospline $\tilde{B}_n$ und einen etwas transformierten Eulerspline $\tilde{E}_n$, die folgendermaßen definiert sind: Der n-te Bernoullische Monospline $\bar{B}_n$ wird definiert als

$$\bar{B}_n(x) = B_n(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$\bar{B}_n(x + 1) = \bar{B}_n(x),$$

wobei B_n das n-te Bernoullische Polynom sein soll. Der n-te Eulerspline $\bar{E}_n$ wird definiert als

$$\bar{E}_n(x) = E_n(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\bar{E}_n(x+1) = -\bar{E}_n(x),$$

wobei E_n das n-te Eulerpolynom sein soll. Sei weiterhin

$$\tilde{B}_n(x) = \bar{B}_n(x) + (1 + 2^{1-n})2^{-n}B_n(0),$$
$$\tilde{E}_{2t+1}(x) = (-1)^t\bar{E}_{2t+1}(2x) + (-1)^{t+1}E_{2t+1}(0),$$
$$\tilde{E}_{2t}(x) = (-1)^t\bar{E}_{2t}(2x - (1/2)) + (-1)^t E_{2t}(1/2).$$

In Strauß [14], *S*. 387 ist gezeigt, daß $\tilde{B}_n$ und $\tilde{E}_n$ ein duales Paar im Sinne von Satz 2.1 sind. Damit ist gezeigt, daß die Euler-Mac-Laurin-Formel, die dem Bernoullischen Monospline zugeordnet ist (siehe Schoenberg [12]), eine optimale Quadraturformel im Sinne von (1.2) ist, wenn n, k, I und J in der genannten Weise vorgegeben werden.

(II) *Man kann auch Satz 2.2 verwenden, um optimale Quadraturformeln zu gewinnen*

Im Fall $n = 2$ ist das Interpolationsproblem (4.1) leicht lösbar. Man betrachtet nun alle Perfektsplines mit k doppelten Nullstellen und berechnet den Integralwert auf dem Intervall [0, 1]. Anschließend bestimmt man durch Differentration die extremalen Stützstellen. Sie sind allerdings schon bei Nikolskii [11] zu finden.

Literatur

1. K. Jetter, Optimale Quadraturformeln mit semidefiniten Peanokernen, *Numer. Math.* **25** (1976), 239–249.
2. S. Karlin, Interpolation properties of generalized perfect splines and the solutions of certain extremal problems, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **206** (1975), 25–66.
3. S. Karlin, Best quadrature formulas and splines, *J. Approximation Theory* **4** (1971), 59–90.
4. S. Karlin and C. A. Micchelli, The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying boundary conditions, *Israel J. Math.* **11** (1972), 405–451.
5. G. Lange, "Beste und optimale Quadraturformeln," Dissertation, Clausthal, 1977.
6. A. A. Melkman, The Budan–Fourier theorem for splines, *Israel J. Math.* **19** (1974), 256–263.
7. A. A. Melkman, Interpolation by splines satisfying mixed boundary conditions, *Israel J. Math.* **19** (1974), 369–381.
8. C. A. Micchelli, "The Fundamental Theorem of Algebra for Monosplines with Multiplicities," ISNM, Vol. 20, Birkhäuser, Basel, 1972.
9. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Quadrature formulae and Hermite–Birkhoff interpolation, *Advances in Math.* **11** (1973), 93–112.

10. C. A. MICCHELLI, T. J. RIVLIN, AND S. WINOGRAD, The optimal recovery of smooth functions, *Numer. Math.* **26** (1976), 191–200.
11. S. M. NIKOLSKII, "Quadrature Formulae," Hindustan Publishing Corp., Delhi, 1964.
12. I. J. SCHOENBERG, Monosplines and quadrature formulae, *in* "Theory and Applications of Spline Functions" (J. N. E. Greville, Ed.), pp. 157–207, Academic Press, New York/London, 1969.
13. I. J. SCHOENBERG, A second look at approximate quadrature formulae and spline interpolation, *Advances in Math.* **4** (1970), 277–300.
14. H. STRAUß, Approximation mit Splinefunktionen und Quadraturformeln, *in* "Spline Functions" (K. Böhmer, G. Meinardus, and W. Schempp, Eds.) Lecture Notes in Mathematics No. 501, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
15. H. STRAUß, "Best L_1-approximation," Bericht 035 des Instituts für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen–Nürnberg, pp. 1–20, Eingereicht zur Veröffentlichung.
16. H. STRAUß, Untersuchungen über Quadraturformeln, *in* "Numerische Methoden der Approximationstheorie, Oberwolfach 1977," L. Collatz, G. Meinardus, H. Werner, Eds., pp. 306–319, ISNM, Vol. 42, Birkhäuser, Basel, 1978.